



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Dr. José Raúl Montes de Oca Machorro
Jefe del Departamento
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

C.B.I.MAT.054.2024

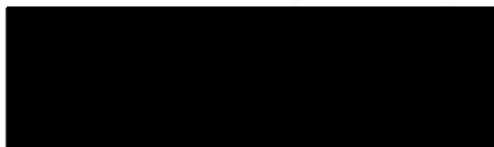
13 de mayo, 2024

Dr. Román Linares Romero
Presidente del Consejo Divisional
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
P r e s e n t e

Por medio del presente me permito solicitar, se incluya en el Orden del Día de la próxima Sesión del Consejo Divisional, el proyecto **“Enfoque Analítico-Combinatorio y su Equivalencia de Estados Gaussianos”**, que presenta el **Dr. Josué Iván Ríos Cangas (43862)**.

Agradeciendo la atención a la presente, quedo a sus órdenes para cualquier aclaración que requiera al respecto.

A t e n t a m e n t e
“Casa Abierta al Tiempo”



Anexo: Constancia.
 Carta de aprobación del proyecto.
 Proyecto de investigación.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, Núm. 186, Col. Leyes de Reforma 1 A Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310,
Ciudad de México.

Tels. 55 5004 1005 06 07

@xanum.uam.mx, www.izi.uam.mx

ENFOQUE ANALÍTICO-COMBINATORIO Y SU EQUIVALENCIA DE ESTADOS GAUSSIANOS

Mayo de 2024

RESPONSABLE (15h/sem)

- Dr. Josué Ivan Rios Cangas
Profesor asociado "D" T.C. N°: 43862
Departamento de Matemáticas, UAM-I
[REDACTED]@xanum.uam.mx

PROFESORES PARTICIPANTES

UAM-I (8h/sem)

- Dr. Jorge R. Bolaños Servín
Profesor asociado "D" T.C. N°: 37085
Departamento de Matemáticas, UAM-I
[REDACTED]@xanum.uam.mx
- Dr. Roberto Quezada Batalla
Profesor Titular "C" T.C. N°: 598
Departamento de Matemáticas, UAM-I
[REDACTED]@xanum.uam.mx

Externos

- Dr. Luigi Accardi
Vito Volterra Interdepartmental Centre
University of Rome Tor Vergata
- Dr. Franco Fagnola
Profesor de Probabilidad y Estadística
Politecnico di Milano, Italia

ALUMNOS PARTICIPANTES

Proyecto de Investigación (3h/sem)

- María Paula Buendía Buendía
Matrícula: 2173048838
Licenciatura en matemáticas, UAM-I
 - Artemisa Izquierdo Ramos
Matrícula: 2193013297
Licenciatura en matemáticas, UAM-I
 - Jair Alfredo Medina Pérez
Matrícula: 2183013703
Licenciatura en matemáticas, UAM-I
 - César Alberto Solís Gómez
Matrícula: 2203041992
Licenciatura en matemáticas, UAM-I
 - Arturo González Hernández
Matrícula: 2203009261
Licenciatura en matemáticas, UAM-I
- #### Servicio Social (3h/sem)
- Kevin Alberto Durán Chávez
Matrícula: 2183012000
Licenciatura en matemáticas, UAM-I
 - Lucero Lizeth Machorro Fierros
Matrícula: 2193014785
Licenciatura en matemáticas, UAM-I

Resumen

El desarrollo de este trabajo tiene la intención de exhibir rigurosamente una caracterización tanto analítica como combinatoria de los estados Gaussianos en términos de los momentos de Weyl en infinitos modos. Para lograr esto, se extenderá primeramente la noción de representaciones de Weyl al caso infinito con productos tensoriales para dar posteriormente la parte analítica. Para la parte combinatoria, se dará una definición estados Gaussianos combinatorios y después se mostrará la equivalencia de los dos enfoques. Este proyecto permitirá el desarrollo de nuevas líneas de investigación, redacción y publicación de notas de difusión y divulgación matemática, formación de recursos humanos, consolidación con grupos de investigadores, entre otros.

Palabras clave: quantum Gaussian states; non-commutative Fourier transform; Weyl moments; combinatorial Gaussian states.

1 Actividades y contribución de los participantes

RESPONSABLE Y PROFESORES UAM-I. El responsable se encargará de dirigir y gestionar el desarrollo de este proyecto con el apoyo de los profesores participantes. Ambas partes organizarán, proyectarán y programarán las actividades para el alcance total de cada objetivo trazado. Serán los más involucrados en la parte de investigación y en la participación de los eventos de investigación que se susciten a lo largo de este trabajo.

EXTERNOS. Los colaboradores externos de este proyecto mantendrán comunicación tanto sincrónica como asincrónica sobre los avances y problemas de investigación que surjan en el cumplimiento de este trabajo. Con el desarrollo de este proyecto se espera la visita de al menos un miembro externo para consolidar el vínculo de investigación que se tiene con estos dos miembros externos, con los cuales se ha tenido colaboración en otros proyectos de investigación.

ALUMNOS DE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN. Los alumnos investigarán y desarrollarán temas de investigación a nivel de licenciatura relacionados con los temas de sus proyectos de investigación. Ellos expondrán sus avances de manera constante a sus respectivos asesores, los cuales serán redactados en notas de tesis. Además, asistirán en los eventos de investigación que se tienen contemplados en este proyecto.

ALUMNOS DE SERVICIO SOCIAL. De antemano, mencionamos que los alumnos del servicio social han iniciado su servicio en talleres y notas de divulgación matemática. Se aprovecharán sus avances y conocimientos que han adquirido para que continúen su servicio enfocado al desarrollo de manuales y talleres con temas que surjan de este trabajo de investigación.

2 Objetivo general y objetivos particulares

El objetivo general de este proyecto es mostrar de manera tanto analítica como combinatoria de la caracterización de estados Gaussianos a través de los momentos de Weyl en infinitos modos, así como la equivalencia de estos dos enfoques. De manera particular se tienen lo siguiente:

1. Extender la noción de representación de Weyl de las relaciones de conmutación canónicas al caso infinito en productos tensoriales de familias de espacios de Hilbert.
2. Analizar las propiedades que soporta el generador infinitesimal del grupo uniparamétrico de operadores unitarios que es formado por el operador de Weyl en infinitos modos.
3. Mostrar una caracterización de manera analítica de los momentos de Weyl de estados Gaussianos y las propiedades de su correspondiente vector media y matriz de covarianza.
4. Exhibir una noción de estado Gaussiano combinatorio y una caracterización de momentos Gaussianos combinatorios.

5. Mostrar la interrelación que existe entre los momentos analíticos y combinatorios de estados Gaussianos.

3 Antecedentes

En [2] se mostró una caracterización de estados Gaussianos en términos de los momentos del operador de campo, los cuales son conocidos como los momentos de Weyl. La noción de los momentos de Weyl involucra la función traza con respecto a un estado, que es bien conocida en espacios de Banach de la clase de traza, de operadores que no necesariamente son acotados. Lo anterior se puede abordar mediante las conocidas aproximaciones de Yosida. El enfoque anterior permite definir a los momentos de un operador normal respecto a un estado y este enfoque se le conoce como analítico de estados cuánticos Gaussianos en un modo.

Por otra parte, L. Accardi muestra en su charla dada en <https://youtu.be/79PoPWVICY4?si=bmGW4U0ZDye7GgHh>, la noción de estado Gaussiano combinatorio mediante momentos combinatorios y las llamadas particiones a pares. Los mapeos Gaussianos combinatorios que exhibe L. Accardi están dados en tres enfoques: fermiones, libres y bosónicos. Estos últimos reflejan similitudes al enfoque analítico.

4 Descripción y estrategias

Es posible extender el enfoque analítico al caso de infinitos modos, el cual se pretende abordar con la teoría de espacios de Fock y productos tensoriales. Además de seguir líneas análogas del caso de un modo que se estudió en [2]. Para el enfoque combinatorio, se apoyará de las notas de L. Accardi para extender la noción estados combinatorios a través de los operadores de campo. Teniendo estos dos enfoques, se pretende establecer la conexión entre estos dos enfoques y sus aplicaciones a estados y canales cuánticos Gaussianos.

Es de interés señalar que tanto el responsable del proyecto como los profesores (internos y externos) son especialistas en teoría de operadores lineales, semigrupos cuánticos de Markov, análisis estocástico y probabilidad cuántica. Además, los alumnos participantes tiene su proyecto de investigación y servicio social con temas a fines de este trabajo.

Aprovecharemos la experiencia y conocimientos de cada uno de los participantes para llevar a cabo la realización de este trabajo. Los miembros profesores son especialistas en los temas involucrados a este proyecto como análisis funcional, semigrupos cuánticos de Markov, operadores de Weyl, de campo y generadores infinitesimales, análisis combinatorio, teoría de operadores no acotados, caracterización de estados y canales cuánticos Gaussianos, entre otros.

Los alumnos participantes trabajan en temas a fines de este proyecto: los alumnos de proyecto de investigación; Artemisa Izquierdo y Jair Medina están trabajando con el problema de momentos, mientras que María Buendía con matrices K_4 -Circulantes, y César Solís con transformaciones lineales no densamente definidas y Arturo González sobre las herramientas básicas de entorno Manim, para ofrecer videos de duración corta que ilustre tanto el uso de las herramientas que ofrece Manim como la difusión y/o divulgación de las matemáticas. Por otra parte, los alumnos de servicio social realizan su trabajo en notas y talleres de divulgación en matemáticas; Kevin Alberto Durán

en aplicaciones del cálculo diferencial e integral a las diferentes carreras de la UAM-I, y Lucero Machorro realiza talleres de matemáticas como apoyo a las ayudantías que ofrece el Departamento de Matemáticas. Se aprovecharán los conocimientos que han adquirido de los alumnos, tanto de proyecto de investigación como los del servicio social, para consolidar la elaboración de este proyecto.

Se tienen contempladas reuniones de manera periódica entre los miembros de este proyecto para avanzar en cada una de las metas y objetivos propuestos. Los profesores participantes locales se reunirán para discutir sobre los avances que se han tenido a lo largo de este proyecto y tendrán comunicación de manera remota con los colaboradores externos para abordar dichos avances. De igual manera, los profesores locales supervisarán de manera constante el desarrollo y avances que los alumnos participantes, tanto de los del proyecto investigación como los del servicio social, han tenido sobre los temas y trabajo que se les dejarán en relación con este proyecto.

5 Metas

Las metas contempladas para la realización de este proyecto son:

1. Realizar un análisis exhaustivo de las referencias [1,3] para extender la noción de representación de Weyl de las relaciones de conmutación canónicas al caso infinito, utilizando las propiedades de estabilizadores de productos tensoriales infinitos.
2. Mostrar las propiedades analíticas, algebraicas y de conmutación que soporta el generador infinitesimal de infinitos modos, del grupo de Weyl que usualmente es llamado en la literatura como operador de campo [2].
3. Caracterizar de manera analítica los momentos de Weyl de estados Gaussianos mediante operadores normales no necesariamente acotados, que son integrables respecto un estado. La base de esta noción de integrabilidad son las aproximaciones de Hill Yosida [4], y es dada en [2] para observables.
4. La noción de estado Gaussiano combinatorio que se construirá es con base al caso bosónico del trabajo del Profesor Luigi Accardi que presento en el Seminario de Análisis del Departamento de Matemáticas de la UAM - Iztapalapa¹.

6 Recursos disponibles para el desarrollo del proyecto

Tanto el responsable del proyecto como los profesores internos son investigadores de tiempo completo y pertenecen al Área de Análisis del Departamento de Matemáticas, UAM-I. Los profesores externos tienen comunicación asincrónica de manera constante. Además, todo el alumnado participante está a cargo tanto del responsable como de los profesores internos.

¹Charla disponible en <https://youtu.be/79PoPWICY4?si=bmGW4U0ZDye7GgHh>.

NOMBRE	NO. ECO	TABULADOR*	DEDICACIÓN (MAX. 40 HRS SEMANALES)				TIPO DE PARTICIPACIÓN
			TRIMESTRE I	TRIMESTRE II	TRIMESTRE III	TRIMESTRE IV	
JOSUÉ IVAN RIOS CANGAS	43862	ASOCIADO "D"	1	1	1	1	RESPONSABLE
JORGE RICARDO BOLAÑOS SERVÍN	37085	ASOCIADO "D"	1	1	1	1	PARTICIPANTE INTERNO
ROBERTO QUEZADA BATALLA	598	TITULAR "C"	1	1	1	1	PARTICIPANTE INTERNO
LUIGI ACCARDI	NA	NA			1		PARTICIPANTE EXTERNO
FRANCO FAGNOLA	NA	NA			1		PARTICIPANTE EXTERNO
MARÍA PAULA BUENDÍA BUENDÍA	2173048838	ALUMNO	1	1			ALUMNADO PARTICIPANTE
ARTEMISA IZQUIERDO RAMOS	2193013297	ALUMNO	1	1			
JAIR ALFREDO MEDINA PÉREZ	2183013703	ALUMNO	1				
CÉSAR ALBERTO SOLÍS GÓMEZ	2203041992	ALUMNO	1	1	1		
KEVIN ALBERTO DURÁN CHÁVEZ	2183012000	ALUMNO	1	1			
ARTURO GONZÁLEZ HERNÁNDEZ	2203009261	ALUMNO		1	1	1	
LUCERO LIZETH MACHORRO FIERROS	2193014785	ALUMNO	1	1			

7 Infraestructura actual en la Universidad disponible para el proyecto

La UAM-Iztapalapa es una de las cinco unidades de la UAM en la Ciudad de México. El Departamento de Matemáticas desarrolla investigación en las áreas de Álgebra, Análisis, Ecuaciones Diferenciales y Geometría, Matemáticas Discretas, Análisis Numérico y Modelación Matemática, Probabilidad, Estadística y Topología. Cuenta con una infraestructura competente para la realización de investigación en cada una de sus distintas áreas. El departamento proporcionará las instalaciones físicas suficientes y necesarias, acorde con el trabajo propuesto. También ofrecerá facilidades de acceso a internet, publicaciones electrónicas, bases de datos, y medios tecnológicos, entre otros. Esto con objeto de facilitar el trabajo de proyecto, apoyar el desarrollo académico y la participación a eventos académicos, tanto nacionales como extranjeros.

8 Indicadores de desempeño

Se espera que el desarrollo de este trabajo se tengan los siguientes resultados:

- Un artículo publicado en revista indexada que muestre los resultados obtenidos de este proyecto.
- La visita de uno de los miembros externos al Departamento de Matemáticas de la UAM-Iztapalapa.
- La asistencia de uno de los miembros profesores locales al QP-44, en Milán, Italia.
- La asistencia y/o participación de tres alumnos y tres profesores al BIRS-CMO workshop-24w5240.
- Al menos tres tesis de licenciatura o su equivalencia para la obtención de grado.
- Culminación de los tres servicios sociales, que contribuirá al acceso general del conocimiento con la elaboración de los productos:
 - el manual de aplicaciones del cálculo diferencial e integral del alumno Kevin,

- el manual sobre las herramientas básicas de Manim y la elaboración de al menos 2 cortometrajes sobre temas relacionados con este proyecto elaborados por el alumno Arturo
 - y por parte de la alumna Lucero, la impartición de los talleres como apoyo a las ayudantías.
- Nuevas líneas de investigación y proyectos de tesis para alumnos tanto de licenciatura como de posgrado.

9 Fuentes de financiamiento

El financiamiento principal es a través de la Dirección de Apoyo a la Investigación, además de recursos financieros complementarios aportados por la UAM-Iztapalapa a través de la División de CBI y el Departamento de Matemáticas, para el desarrollo y operación del proyecto, como viáticos, pasajes, oficinas, recurso de red, acceso a publicaciones electrónicas, entre otros.

A continuación presentamos la descripción general del presupuesto y justificación del financiamiento que es a través de la Dirección de Apoyo a la Investigación.

Monto del gasto	Rubro	Concepto	Justificación
\$50,000	Viáticos	Asistencia al International Conference & School on Quantum Probability QP44, sede Milán, Italia	Se cubrirá la mayoría de los gastos para la asistencia de uno de los participantes del proyecto al QP-44.
\$42,000	Viáticos	Asistencia y/o participación de tres alumnos y tres profesores al BIRS-CMO workshop 24w5240.	Se cubrirán pasaje, viáticos y/o cuotas de inscripción de los seis participantes al BIRS-CMO workshop 24w5240
\$25,000	Viáticos	Visita del al miembro externo del proyecto, al Departamento de Matemáticas de la UAM-I para colaborar con los participantes locales.	Se cubrirán pasaje y/o viáticos del visitante externo.
\$18,000	Gastos de trabajo de campo	Tres becas de servicio social para los alumnos participantes.	Los alumnos del servicio social hacen trabajo de campo para recolectar material necesario en la elaboración de sus notas, manuales y talleres.
\$15,000	Herramientas Menores	Equipo de computo laptop para alumnado.	Equipo requerido para las sesiones de trabajo en oficina, en donde se discuten los temas de investigación. Hay alumnos del proyecto que no cuentan con dicho equipo para la realización de su trabajo.
Total	\$150,000		

10 Fecha de inicio, duración y planeación

§10.1. FECHA DE INICIO Y DURACIÓN. El periodo conforme a la convocatoria para postulación de proyectos de investigación por personal académico de ingreso reciente es comprendido por un año: del 18 de marzo de 2024 al 17 de marzo de 2025. Con posibilidad de extenderse un año más con previa justificación notificada a la Dirección de Apoyo a la Investigación (DAI).

§10.2. PLANEACIÓN. Los miembros profesores locales se reunirán de una a dos sesiones por semana de manera presencial y se comunicarán con los miembros externos de manera remota, tanto sincrónica como asincrónica. Los profesores locales se reunirán también de una a dos sesiones por semana con los alumnos de proyecto de investigación y del servicio social. Cabe mencionar que se tienen contemplada la asistencia y participación de cada uno de los miembros colaboradores a reuniones de investigación como seminarios, coloquios, congresos, mini-cursos, plenarias, entre otros, que puedan enriquecer el desarrollo de este trabajo así como la difusión y divulgación de los resultados obtenidos. De manera particular, la asistencia y participación al Seminario de Posgrado que soporta la UAM-Iztapalapa, la asistencia y/o participación de al menos tres alumnos y tres profesores al BIRS-CMO workshop: "Quantum Markov Semigroups and Channels: Special Classes and Applications (24w5240)", que se llevará a cabo del 18 al 23 de agosto de 2024². De igual manera, la asistencia de al menos un miembro del proyecto en el The 44th International Conference & School on Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis³ in memory of K.R. Parthasarathy QP-44, Milán, Italia. Además, la visita a la UAM-Iztapalapa de al menos uno de los miembros externos para discutir los avances y las nuevas líneas de investigación que surjan con la elaboración de este trabajo. Esto permitirá tener nuevos temas y proyectos de investigación para alumnos de licenciatura y posgrado y fomentar la formación de recursos humanos de la UAM-Iztapalapa.

Por otra parte, se realizarán una notas sobre los avances que se vayan obteniendo en el desarrollo de este trabajo. Posteriormente, estas notas se condensará en un artículo de investigación para ser sometido y publicado en una revista indexada. Los alumnos, tanto de proyecto de investigación como los del servicio social, plasmarán sus avances en distintos materiales como, avances de tesis, manuales y videos de divulgación. Los profesores darán orientación, continuidad y retroalimentación de manera gradual a los avances de los alumnos, para enriquecer el contenido de su trabajo y su formación académica, para que ellos puedan realizar a futuro acciones de movilidad académica.

²Página del evento del BIRS-CMO workshop en: <http://www.birs.ca/event/24w5240>.

³Página del evento anterior QP-43 en: <http://math.hanyang.ac.kr/users/math/common/2/qp43/qp43.html>.

En lo siguiente presentamos el desglose de las actividades que se realizarán dentro del proyecto:

Cronograma general de las actividades				
N°	Descripción de actividad	Fecha		Producto esperado
		inicio	fin	
1	Análisis exhaustivo de referencias bibliográficas y discusión de los temas del proyecto.	18/3/24	30/4/24	Inicio del proyecto
2	Analizar propiedades analíticas, algebraicas y de conmutación del generador infinitesimal.	1/5/24	31/7/24	Propiedades analíticas y de conmutación del operador de campo.
3	Caracterizar analíticamente los momentos de Weyl de estados Gaussianos.	1/8/24	31/10/24	Descripción de los momentos de estados Gaussianos en infinitos modos.
4	Mostrar la caracterización de momentos Gaussianos combinatorios y su relación con los momentos analíticos.	1/11/24	31/1/25	Momentos Gaussianos combinatorios acorde al trabajo del Profesor Luigi Accardi.
5	Redacción de notas, elaboración del artículo y someterlo a publicación.	1/5/24	28/2/25	Artículo de investigación sometido en revista indexada.
6	Visita de uno de los miembros externos al Departamento de Matemáticas de la UAM-I.	Sujeto a disposición		Seminarios y discusión sobre temas del proyecto.
7	Asistencia de uno de los miembros profesores locales al QP44, en Milán, Italia.	13/5/24	17/5/24	Fortalecimiento tanto del proyecto como de las nuevas líneas de investigación.
8	Asistencia y/o participación de los 6 miembros al BIRS-CMO workshop-24w5240.	18/8/24	123/8/24	Fortalecimiento tanto del proyecto como de las nuevas líneas de investigación.
9	Elaboración de tres tesis de licenciatura o su equivalencia para la obtención de grado.	18/3/24	17/3/25	Formación de recursos humanos del Departamento de Matemáticas, UAM-I.
10	Culminación de los tres servicios sociales.	18/3/24	31/8/24	Dos manuales de divulgación matemática e impartición de talleres.
11	Redacción del Informe final.	1/2/25	17/3/25	Informe para avalar el trabajo final realizado.

Referencias

- [1] Asao Arai, *Analysis on Fock spaces and mathematical theory of quantum fields*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2018, An introduction to mathematical analysis of quantum fields. MR 3752148
- [2] Jorge R. Bolaños Servín, Roberto Quezada, and Josué I. Rios-Cangas, *Weyl moments and quantum Gaussian states*, Rep. Math. Phys. **90** (2022), no. 3, 357–376. MR 4516426
- [3] K. R. Parthasarathy, *An introduction to quantum stochastic calculus*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1992, [2012 reprint of the 1992 original] [MR1164866]. MR 3012668
- [4] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983. MR 710486